韓國經營科學會誌
第23卷 第4號
1998年 12月

이분할성 우선순위제약을 갖는 배낭문제에 대한 다면체적 절단평면*

이경식** · 박성수** · 박경철***

Facets of Knapsack Polytopes with Bipartite Precedence Constraints*

Kyungsik Lee** · Sungsoo Park** · Kyungchul Park***

■ Abstract ■

We consider the precedence-constrained knapsack problem, which is a knapsack problem with precedence constraints imposed on the set of variables. Especially, we focus on the case where the precedence constraints can be represented as a bipartite graph, which occurs most frequently in applications. Based on the previous studies for the general case, we specialize the polyhedral results on the related polytope and derive stronger results on the facet-defining properties of the inequalities.

1. 서 론

우선순위제약이 있는 배낭문제(Precedence-Constrained Knapsack Problem : PK)는 일반적인 배낭문제에서 결정변수에 우선순위제약이 주어진 문제이다. 본 연구에서는 특히 결정변수들을 두 개의 집합으로 나눌 수 있고, 서로 다른 집합에 속하는 변수들 간에 우선순위제약이 나타나는 문제를 다룬다. 이 경우 우선순위제약을 그래프(graph)로 나타내면 이분할성 그래프(bipartite graph)로 나타나게 되며, 이 문제를 이분할성 우선순위제약이 있는 배낭문제(PK with Bipartite Precedence

* 본 연구는 한국과학재단 핵심전문연구(과제번호 961-1012-094-1)로 수행되었음.
** 한국과학기술원 산업공학과
*** 한국통신 통신망연구소

Constraints : BPK) 라고 한다. (BPK)는 다음과 같은 상황을 묘사하기 위해서 사용된다.

- 과제(project)의 집합 M과 활동(activity)의 집합 N이 주어져 있다. 각각의 과제 $i \in M$를 수행하기 위해서는 N의 정해진 부분집합 R_i에 속하는 모든 활동들이 수행되어야 한다.(각 과제에 대한 필요한 활동의 집합은 서로 교집합이 있을 수 있다.)

- 과제 $i \in M$를 수행하면 w_i만큼의 이득을 얻을 수 있으며, 각각의 활동 $j \in N$를 수행하기 위해서는 고정비용 c_j가 요구되고 a_j만큼의 자원이 소모되며, 총 가용자원의 양은 b이다.

(BPK)는 위와 같은 상황하에서 순이익을 최대화하기 위해 수행하여야 할 과제 및 활동들을 선정하는 문제이다. 이 문제를 (0, 1)-정수계획모형으로 정식화하기 위해서 두 종류의 이진변수(binary variable) x_i, $\forall i \in M$, 와 y_j, $\forall j \in N$를 정의하자. x_i는 과제 i가 수행되면 1, 아니면 0의 값을 갖는 변수이고, y_j는 활동 j가 수행되면 1, 아니면 0의 값을 갖는 변수이다. 그러면, (BPK)를 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$\text{(BPK)}\quad \max \sum_{i \in M} w_i x_i - \sum_{j \in N} c_j y_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in N} a_j y_j \le b \qquad (1)$$

$$x_i \le y_j, \quad \text{for all } j \in R_i \text{ and } i \in M$$

$$x \in B^{|M|}, \quad y \in B^{|N|} \qquad (2)$$

목적함수는 순이익을 표현하고 있으며, 제약식 (1)은 가용자원의 제약을 나타내며, 제약식 (2)는 각 과제를 수행하기 위해서는 필요한 활동들이 수행되어져야 한다는 것을 나타내는 우선순위제약이다. 만약, 필요한 활동의 집합 R_i가 서로 교집합을 갖지 않으면, (BPK)는 (0, 1)-배낭문제로 변환될 수 있다.

(BPK)에서는 일반적으로 다음의 사항들을 가정할 수 있다. 1) 모든 $j \in N$에 대해서 $a_j \le b$이고, 2) 모든 $i \in M$에 대해서 $\sum_{j \in R_i} a_j \le b$ 이며, 3) 모든 $i \in M$에 대해서 $|R_i| \ge 2$이다. 만일 어떤 $j \in N$에 대해서 조건 1)이 만족되지 않으면, 해당 활동 및 그 활동을 필요로 하는 과제들을 문제로부터 제거할 수 있다. 유사하게 어떤 $i \in M$에 대해 조건 2)가 만족되지 않으면, 그 과제를 문제로부터 제거할 수 있다. 또한 어떤 $i \in M$에 대해 조건 3)이 성립하지 않는다면, 그 과제에 해당되는 변수는 필요활동에 해당되는 변수와 통합되거나 ($w_i > 0$인 경우), 제거될 수 있다.

(BKP)의 응용문제로는 자본계획문제[8], 유연생산시스템에서의 생산계획문제[3, 6, 12], 데이터베이스 설계문제[5], 클릭(Clique)문제[4, 10], 군집(Clustering)문제[7] 등이 있다.

본 논문에서는 (BPK)에 관련된 이론적인 연구결과들을 간략하게 정리하고 이들 결과를 고찰하여 (BPK)에 관련된 다면체(Polytope)에 대한 이론적인 분석결과를 제시하고자 한다. 2절에서는 (BPK)의 계산상 복잡도(computational complexity)를 포함한 관련 연구결과들을 정리하고, 3절에서는 본 연구에서 도출된 이론적인 연구결과를 제시한다. 마지막으로 4절에서는 결론 및 추후연구 방향을 제시한다.

2. 관련 연구

1절에서 제시한 (BPK)의 수리모형에서 제약식 (1)이 없는 경우는 특별하게 고안된 망(network)상에서 최소절단집합(minimum cut)을 구하는 문제로 변환될 수 있으며, 따라서 최적해를 효율적으로 구할 수 있는 다항시간해법(polynomial time algorithm)이 존재한다[1]. 그러나 제약식 (1)이 있는 경우는 (0, 1)-배낭문제가 (BPK)의 특수한 경우(special case)가 되므로 NP-hard 문제가 된다. 또한, 제약식 (1)의 좌변에 나타나는 변수의 계수가

모두 1의 값을 갖는 경우도 역시 NP-hard임이 밝혀져 있다[10].

Mamer and Shogan[8]은 자본계획문제를 (BPK)로 모형화하여 라그랑지안 완화기법(Lagrangian relaxation method)에 근거한 해법을 제시하였다. 유사한 방법을 사용하여 Hwan and Shogan[6]은 유연생산시스템에서의 생산계획문제에 (BPK)를 응용한 바 있다.

(BPK)에 관련된 다면체적 연구는 Boyd[2], Johnson *et. al.*[7], Dijkhuizen and Faigle[4], Park and Park[11], Park *et. al.*[10]과 Crama and Mazzola[3] 등이 있다. 이 중 Boyd[2]와 Park and Park[11]은 우선순위제약 (2)가 이분할성에 국한되지 않은 일반적인 형태를 갖는 경우를 연구하였으며, Crama and Mazzola[3]는 (BPK)를, Johnson *et. al.*[7], Dijkhuizen and Faigle[4], Park *et. al.* [10]은 우선순위제약이 특수한 이분할성 그래프로 표현이 되는 (BPK)의 특수한 경우를 다루고 있다.

위의 연구들 중에서 본 논문에서의 다면체적 연구와 관련된 내용을 요약하면 다음과 같다. 주어진 (BPK)에 대한 정수가능해집합의 볼록포체(convex hull)을 P로 정의한다. 그러면, 1절에서 제시된 가정하에서 P가 full-dimensional 다면체, 즉, $|M|+|N|$차원의 다면체가 됨을 쉽게 보일 수 있다.

N의 부분집합 D가 다음과 같은 식을 만족할 때, D를 cover라고 정의한다.

$$\sum_{j\in D} a_j > b$$

임의의 cover D에 대해서 다음의 부등식은 P에 대한 유효부등식(valid inequality)이다.

$$\sum_{j\in D} y_j \le |D|-1$$

위의 부등식을 'cover 부등식'이라고 하며, 일반적인 (0, 1)-정수계획문제의 해법에 유용하게 사용되고 있다. (BPK)와 같이 변수집합에 우선순위제약이 있는 경우는 위의 cover 부등식을 수정하여 강화된 부등식을 유도해 낼 수 있다. 이를 위해 다음과 같은 기호를 정의한다.

변수간에 주어진 우선순위 관계는 유방향그래프(directed graph) G로 표현될 수 있다. 먼저 G의 마디(node)의 집합을 $M\cup N$으로 한다. 그리고, $i\in M$와 $j\in N$에 대해서, 만약 $j\in R_i$이면, 유방향호(arc) (j, i)를 정의한다. 이렇게 얻어진 그래프를 우선순위그래프라 한다. 그러면, (BPK)의 경우에는 우선순위그래프가 이분할성 그래프(bipartite graph)가 된다. M의 임의의 부분집합 C에 대해서, $R(C) = \cup_{i\in C} R_i$라 하고, N의 임의의 부분집합 D와 M의 임의의 부분집합 C에 대해서, $S_C(D) = \{i\in C \mid D\cap R_i \neq \emptyset\}$라 한다. 이 때, $D=\{j\}$인 경우, $S_C(\{j\}) = S_C(j)$라고 표시하기로 한다. 그리고, $R(C)$는 다음과 같이 두 개의 집합으로 나눌 수 있다. $R_2(C)=\{j\in R(C) \mid |S_C(j)| \ge 2\}$, $R_1(C)=R(C)\backslash R_2(C)$. 위의 정의를 사용하여 (BPK)에 대해서 수정된 cover 부등식은 다음과 같이 정의된다[11].

[정의 1] 임의의 부분집합 $C\subseteq M$가 다음 조건 (3)을 만족하면 C가 종속(dependent)이라고 하고, C를 Induced Cover(IC)라고 한다. 그렇지 않으면, 독립(independent)이라고 한다.

$$\sum_{j\in R(C)} a_j > b \tag{3}$$

조건 (3)을 만족하는 C로부터 정의되는 다음의 부등식 (4)는 P에 대한 유효부등식이며, 이를 'IC 부등식'이라고 한다.

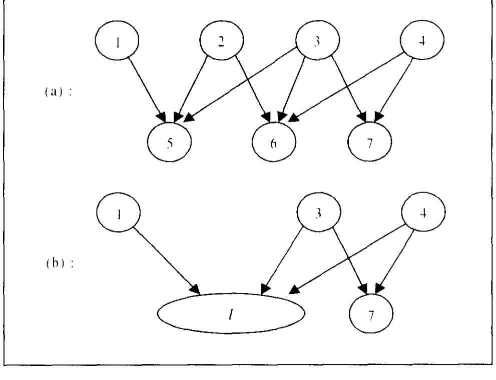
$$\sum_{i\in C} x_i \le |C|-1 \tag{4}$$

하나의 IC C가 추가적으로 다음의 조건 (5)를 만족할 때, C를 Minimal IC(MIC)라고 정의하고 해당되는 IC 부등식 (4)를 'MIC 부등식'이라고 한다.

$$\sum_{j \in R(C \setminus \{k\})} a_j \le b, \ \forall k \in C \tag{5}$$

임의의 IC 부등식 (4)는 $R_2(C)$에 속하는 마디들에 해당되는 변수들을 이 부등식에 도입함으로써 강화될 수 있다. 이와 같이 부등식에 포함되지 않은 변수들을 새로이 포함시키는 과정을 lifting이라 하며, Park and Park[11]은 IC 부등식의 효율적인 lifting 과정을 제시하였다. 이를 소개하기 위해서는 다음의 개념이 필요하다.

$G(C)$를 마디의 집합 $C \cup R(C)$에 의해서 정의된 우선순위그래프 G의 부분그래프(subgraph)로 정의하자. $G(C)$의 유방향호의 집합을 E라 하고, $G(C)$의 임의의 마디 $j \in R(C)$에 대해서 $\delta(j) = \{i \in C \mid (j,\ i) \in E\}$라 정의하자. 또한, $G(C)$를 마디 $j \in R(C)$에 대해서 축약(shrinking)한 그래프를 G'이라 하자. G'은 마디 j와 $\delta(j)$에 포함된 모든 마디들을 새로운 하나의 마디 I로 축약하고, 축약되어진 마디들에 한 쪽 끝을 두었던 모든 호들을 마디 I에 연결하여 얻어진다. 이 때, 새로운 마디 I와 축약되어지지 않은 하나의 마디 사이에 다수개의 호가 생기면 이를 하나의 호로 대체한다. 이 때, C'을 $\{I\} \cup C \setminus \delta(j)$로 정의하고, $R(C')$를 $R(C) \setminus \{j\}$로 정의한다. 그러면, G'의 마디의 집합은 $C' \cup R(C')$이 된다. 또한, G'의 유방향호들의 집합을 E'이라고 정의한다. 우선순위그래프의 축약과정을 예를 들어 설명하면 다음과 같다. 먼저, $G(C)$가 [그림 1]의 (a)와 같이 주어졌다고 하자. 이를 마디 2에 대해서 축약하여 얻어지는 G'은 [그림 1]의 (b)와 같다. 이 때, $C' = \{I,\ 7\}$, $R(C') = \{1,\ 3,\ 4\}$가 된다.



[그림 1] 그래프 축약의 예

위에서 소개된 그래프 축약을 이용해서 Park and Park[11]에서 제시된 IC 부등식의 lifting 과정을 (BPK)의 경우로 특수화 하면 다음과 같다.

[Lifting 과정]

(초기화)

$G(C) = (C \cup R(C),\ E)$, $L = R_2(C)$.

$G^0 = G(C)$, $C^0 = C$, $E^0 = E$, $k = 1$

(Lifting 단계 k)

만일 L이 공집합이면 종료.

임의의 $j \in L$을 선택.

$\delta^{k-1}(j) = \{i \in C^{k-1} \mid (j,\ i) \in E^{k-1}\}$,

$\gamma_j = -(|\delta^{k-1}(j)| - 1)$.

G^{k-1}를 j에 대해서 축약한 후 얻어진 그래프를 $G^k = (C^k \cup R(C^k),\ E^k)$로 둠.

$L \leftarrow L \setminus \{j\}$로 두고 $k \leftarrow k+1$.

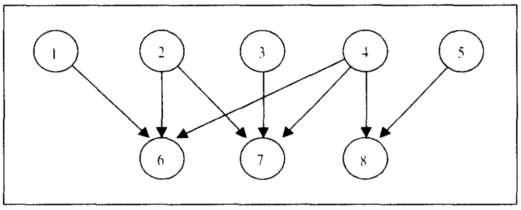
위의 [Lifting 과정]을 거치면, IC 부등식 (4)는 다음과 같은 P에 대한 유효부등식이 된다.

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{j \in R(C)} \gamma_j y_j \le w(C) - 1, \tag{6}$$

단, $\gamma_j = 0$, $\forall j \in R_1(C)$이고, $w(C)$는 그래프 $G(C)$의 연결성요소(connected component)들의 수이다. 주의하여야 할 것은 $R_2(C)$에 속하는 마디들에 해당되는 lifting 계수 γ_j는 마디들이 lifting 되는 순서에 따라서 달라질 수 있다는 것이다. 그러나, 어떠한 순서로 lifting이 되든지에 상관없이 lifting 된 마디들에 해당되는 변수들의 계수의 합은 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\sum_{j\in R(C)}\gamma_j=-(|C|-1)+w(C)-1$$

위와 같은 과정을 예를 들어 설명하겠다. 하나의 우선순위그래프 $G(C)$가 [그림 2]와 같이 주어졌다고 하자. 이 때, $C=\{6, 7, 8\}$이고 $R(C)=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이다. 그리고 (BPK)의 배낭제약식 (1)이 $\sum_{j\in R(C)} y_j \le 4$라고 하자. 그러면, C가 하나의 IC이며, 동시에 MIC가 된다. 따라서 $x_6+x_7+x_8\le 2$라는 IC 부등식을 얻을 수 있다.



[그림 2] 우선순위그래프

여기에 위의 [Lifting 과정]을 적용하면, $x_6+x_7+x_8-y_2-y_4\le 0$ 라는 부등식을 얻을 수 있다. 단, $R_2(C)=\{2, 4\}$에 해당되는 변수들이 lifting은 (2, 4)의 순서로 수행하였다. 만약, (4, 2)의 순서로 수행하면, $x_6+x_7+x_8-2y_4\le 0$ 라는 부등식이 얻어진다.

임의의 $C\subseteq M$에 대해서, $x_i=0,\ \forall i\in M\backslash C$ 그리고 $y_j=0,\ \forall j\in N\backslash R(C)$로 고정했을 때, (BPK)의 정수가능해들이 정의하는 볼록포체(convex hull)를 $P(C)$라고 하자. Park and Park[11]의 연구에서는 임의의 우선순위그래프에 대해서 lifting된 MIC 부등식을 이론적으로 연구하였으며, 그 결과는 (BPK)의 경우, lifting된 IC 부등식 (6)이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시하고 있다. Johnson *et. al.*[7]의 연구에서는 우선순위그래프가 모든 $i\in M$에 대해서 $|R_i|=2$인 특수한 이분할성 그래프로 주어졌을 때, lifting된 IC 부등식 (6)이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시하였다. 또한, 본 연구에서와 같이 일반적인 이분할성 우선순위그래프에 대해서는 Crama and Mazzola[3]가 $w(C)=1$인 경우에 부등식 (6)이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시한 바 있다. 본 연구에서는 $w(C)=1$인 경우, 부등식 (6)이 $P(C)$의 facet을 정의할 조건으로 기존의 연구에서 제시된 충분조건들보다 완화된 조건을 제시하고자 한다.

다음 절에서는 앞에서 제시된 [Lifting 과정]에 의해 lifting된 IC 부등식 (6)이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시하고, (BPK)에 대한 기존의 연구에서 제시된 충분조건들과의 차이점을 제시하겠다.

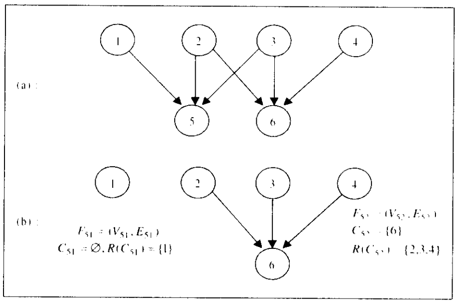
3. 연구 결과

본 연구에서는 임의의 IC $C\subseteq M$에 의해 정의되는 우선순위그래프 $G(C)$가 연결성(connected)인 경우를 고려하고 있다. 이 경우에는 부등식 (6)의 우변상수의 값이 0이 된다. 먼저, 임의의 $C\subseteq M$에 대한 우선순위그래프 $G(C)$가 연결성(connected)인 경우, C가 연결성(connected) 이라고 정의하자. 그리고 $G(C)$가 연결성이고, 모든 $i\in C$에 대해서 그래프 $G(C)\backslash\{i\}$가 비연결성(disconnected)이면, C가 최소연결성(minimally connected)이라고 정의하자. $G(C)$가 연결성인 경우, lifting된 IC 부등식 (6)은 다음과 같은 부등식이 된다.

$$\sum_{i\in C} x_i+\sum_{j\in R(C)}\gamma_j y_j\le 0. \tag{7}$$

하나의 최소연결성인 $C\subseteq M$가 주어졌을 때, 모든 $i\in C$에 대해, 그래프 $F_{ik}=(V_{ik}, E_{ik}), \forall k\in\Gamma_i$를 $G(C)\backslash\{i\}$의 연결성요소(connected component)들이라고 정의하자. 단, $\Gamma_i=\{1, \ldots, w\}$이고 w는 $G(C)\backslash\{i\}$의 연결성요소들의 수이다. 즉, Γ_i는 $G(C)\backslash\{i\}$의 연결성요소들의 index들의 집합이고, V_{ik}와 E_{ik}는 $G(C)\backslash\{i\}$의 하나의 연결성요소의 마디의 집합과 유방향호의 집합이다.

그리고, $C_{ik} = V_{ik} \cap C$, $R(C_{ik}) = V_{ik} \setminus C_{ik}$로 정의하자. 만약, 어떤 $i \in C$와 $k \in \Gamma_i$에 대해서, $C_{ik} = \emptyset$인 경우에는, 어떤 $j \in R(C)$에 대해, $V_{ik} = R(C_{ik}) = \{j\}$이며, $E_{ik} = \emptyset$임에 주의하자. 이를 예를 들어 도시하면 [그림 3]과 같다. [그림 3]에서 $C = \{5, 6\}$이고 $R(C) = \{1, 2, 3, 4\}$이다. [그림 3]의 (a)는 $G(C)$를 나타내고 (b)는 $G(C) \setminus \{5\}$의 연결성요소들을 나타내고 있으며 $\Gamma_5 = \{1, 2\}$이다.



[그림 3] 연결성요소 $F_{ik} = (V_{ik}, E_{ik})$ 예시

위의 정의는 [Lifting 과정]을 수행할 때 생성되는 축약된 우선순위그래프에 대해서도 동일하게 정의된다.

[정의 2] 하나의 최소연결성인 $C \subseteq M$가 주어졌을 때, 어떤 $k \in \Gamma_i$에 대해서, $R_2(C) \subseteq R(C_{ik})$인 C_{ik}가 존재한다면, $i \in C$를 C에 대한 '수정절단마디'라고 정의한다.

위의 [그림 3]에서 $R_2(C) = \{2, 3\}$이고 $R(C_{52}) = \{2, 3, 4\}$이므로 마디 5가 C에 대한 하나의 수정절단마디가 된다.

[정리 1] $C \subseteq M$가 최소연결성이라고 가정하자. 각각의 $i \in C$에 대한 모든 $k \in \Gamma_i$에 대해, $C_{ik} = \emptyset$이거나 C_{ik}는 최소한 하나이상의 C에 대한 수정절단마디를 포함한다.

(증명) 어떤 $i \in C$와 $k \in \Gamma_i$에 대해, $C_{ik} \neq \emptyset$이고 C에 대한 수정절단마디를 포함하지 않는다고 가정하자. 그리고, 각각의 $j \in C_{ik}$에 대해서 C_j라는 집합을 다음과 같이 정의하자. C_j는 어떤 $p \in \Gamma_j$에 대해서 C_{jp}와 같은 집합이며, i를 포함하고 $q \neq k$인 모든 C_{iq}를 포함해야 한다. 단, $q \in \Gamma_i$이다. C가 최소연결성이므로 각각의 $j \in C_{ik}$에 대해 위와 같이 정의된 C_j는 반드시 존재한다.

그러면, $\hat{r} = \max_{j \in C_{ik}} |R_2(C) \cap R(C_j)|$, $\hat{j} = \arg\max_{j \in C_{ik}} |R_2(C) \cap R(C_j)|$로 정의하자. C_{ik}는 C에 대한 수정절단마디를 포함하고 있지 않으므로, $\hat{r} < |R_2(C)|$이다. 따라서, $p \in \Gamma_{\hat{j}}$이고 $C_{\hat{j}p} \neq C_{\hat{j}}$이면서 $|R(C_{\hat{j}p}) \cap R_2(C)| > 0$인 p가 반드시 존재한다. 그러면, $u \in R_2(C)$이고 $u \in R_{\hat{j}} \cap R(C_{\hat{j}p})$인 u가 반드시 존재하고 $S_{C_{\hat{j}p}}(u) \neq \emptyset$이다. $S_{C_{\hat{j}p}}(u)$의 하나의 원소 v를 선택하면, $R(C_{\hat{j}}) \cup \{u\} \subseteq R(C_v)$이고 $|R(C_v) \cup R_2(C)| > \hat{r}$이다. 그런데, C가 최소연결성이고 $C_{\hat{j}p} \neq C_{\hat{j}}$이므로 $C_{\hat{j}p} \subseteq C_{ik}$, 즉, $v \in C_{ik}$이므로 모순이 발생한다. □

다음의 [정리 2]는 최소연결성 IC C에 대해서 lifting된 IC 부등식 (7)의 기본적인 성질 중의 하나를 정리한 것으로써, 쉽게 증명할 수 있으므로 증명은 생략한다.

[정리 2] 어떤 $C \subseteq M$가 최소연결성 IC라고 가정하자. 그러면 lifting된 IC 부등식 (7)에서, 모든 $i \in C$와 $k \in \Gamma_i$에 대해서, $\sum_{j \in R(C_{ik})} \gamma_j = -|C_{ik}|$이다. 그리고 이것은 lifting 순서와는 무관하다.

주어진 최소연결성 IC $C \subseteq M$에 대해, $G^0 = G(C)$라 하고, [Lifting 과정]에서 s번 lifting을 수행하고 난 뒤, 축약되어진 그래프를 $G^s = (V^s, E^s)$

라고 표현하자. 그리고 $C^s = V^s \backslash R(C)$, $R(C^s) = V^s \backslash C^s$로 표현하자. C가 최소연결성이므로, C^s도 최소연결성임을 주목하라. 그래프를 축약하는 과정에서 새로이 생성된 G^s의 각각의 마디 $I \in C^s \backslash C$는 어떤 $A(I) \subseteq C$와 $B(I) \subseteq R(C)$에 속하는 마디들을 축약하여 얻어진 것이다. 앞으로의 설명의 편의를 위해, 새로이 생성된 마디들 각각에 대해 하나의 이진 변수 x_I를 다음과 같이 정의하도록 하겠다.

$$x_I = 1 \Longleftrightarrow x_i = 1, \ \forall i \in A(I), \ y_j = 1, \forall j \in B(I),$$

$$x_I = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0, \ \forall i \in A(I), \ y_j = 0, \forall j \in B(I),$$

그리고, 하나의 lifting된 IC 부등식 (7)이 주어졌을 때, 축약되어진 원래의 마디들에 해당되는 변수들의 계수의 합은 다음과 같다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$|A(I)| + \sum_{j \in B(I)} \gamma_j = 1 \tag{8}$$

하나의 최소연결성 IC C와 이에 대한 하나의 lifting된 IC 부등식 (7)이 주어졌다고 가정하자. 그리고 위에서 정의된 G^s가 주어졌다고 가정하자. 단, $1 \le s \le |R_2(C)|$이다. 그리고, 모든 $i \in C^s$에 대해 Γ_i^s를 $G^s \backslash \{i\}$의 연결성요소들의 index의 집합으로 정의하자. 그러면 [정리 2]와 유사하게 다음의 사실이 성립함을 쉽게 증명할 수 있으며, 이에 대한 증명은 생략한다.

[정리 3] 위에서 정의된 G^s가 주어졌을 때, 모든 $i \in C^s$와 $k \in \Gamma_i^s$에 대해, lifting된 IC 부등식 (7)에서 $\sum_{j \in R(C_{ik}^s)} \gamma_j = -|C_{ik}^s|$가 성립한다. 그리고 이것은 lifting 순서와는 무관하다. 단, $\Gamma_i^s = \{1, \ldots, w\}$이고 w는 $G^s \backslash \{i\}$의 연결성요소들의 수이다.

본 연구에서는 lifting된 IC 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의할 조건을 주된 연구결과로 제시하고 있다. 이를 위해서는 앞서 제시된 정리들과 다음의 보조정리가 필요하다.

[보조정리 1] 하나의 최소연결성 IC $C \subseteq M$가 주어졌을 때, C에 대한 모든 수정절단마디 $i \in C$에 대해서 $C \backslash \{i\}$가 독립이라고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

(a) 모든 $i \in C$와 $k \in \Gamma_i$에 대해, 다음의 해들은 (BPK)의 가능해(feasible solution)들이며, 부등식 (7)을 등식으로 만족한다.

$$y_l = 1, \ \forall l \in R(C_{ik}), \ y_l = 0, \ o/w,$$

$$x_i = 1, \ \forall i \in C_{ik}, \ x_i = 0, \ o/w.$$

(b) 부등식 (7)을 얻는 [Lifting 과정]에서 s번 lifting을 수행한 뒤 얻어진 축약된 우선순위 그래프 G^s가 주어졌을 때, 모든 $i \in C^s$와 $k \in \Gamma_i^s$에 대해, 다음의 해들은 (BPK)의 가능해(feasible solution)들이며, 부등식 (7)을 등식으로 만족한다.

$$y_l = 1, \ \forall l \in R(C_{ik}^s), \ y_l = 0, \ o/w,$$

$$x_i = 1, \ \forall i \in C_{ik}^s, \ x_i = 0, \ o/w.$$

(증명) (a) 주어진 해들은 가정과 [정리 1]에 의해 (BPK)의 가능해들이며, [정리 2]에 의해 부등식 (7)을 등식으로 만족한다.
(b) 주어진 해들은 가정과 [정리 1]에 의해 (BPK)의 가능해들이며, [정리 3]과 식 (8)에 의해 부등식 (7)을 등식으로 만족한다. □

[정리 4] 임의의 IC $C \subseteq M$가 다음의 조건을 만족하면 lifting된 IC 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의한다.

(a) C가 최소연결성이다.
(b) C에 대한 모든 수정절단마디 $i \in C$에 대해서 $C \backslash \{i\}$가 독립이다.

(증명) 주어진 조건 (a)와 (b)가 모두 만족된다고 가정하자. 그리고 다음의 부등식 (9)를 부등식 (7)을 등식으로 만족하는 모든 $P(C)$의 해들이 등식으로 만족하는 식이라고 정의하자.

$$\sum_{i\in C}\alpha_i x_i+\sum_{j\in R(C)}\beta_j y_j\le\alpha_0 \qquad (9)$$

부등식 (9)의 계수들을 상수배에 대해 유일하게 결정하기 위해서, $P(C)$에 속하는 해들중에서 (7)을 등식으로 만족하는 일부 해들을 사용할 것이다. $(x, y)=(0, 0)$이 그러한 해이므로, $\alpha_0=0$. 다음으로, 각각의 $j\in R_1(C)$에 대해, 다음의 해들은 $P(C)$에 속하며 부등식 (7)을 등식으로 만족한다.

$$y_l=1,\ l=j,\ y_l=0,\ o/w,$$
$$x_i=0,\ \forall i\in M.$$

따라서, 각각의 $j\in R_1(C)$에 대해, $\beta_j=0$임을 알 수 있다. 다음으로, 증명의 편의를 위해서, $R_2(C)=\{1, 2, \ldots, r\}$이라 하고 부등식 (7)을 얻기 위해 [Lifting 과정]을 수행할 때, $(1, 2, \ldots, r)$의 순서로 lifting 되었다고 가정하자.

[Lifting 과정]에서 $G^0=(C^0\cup R(C^0), E^0)$라 하고 $G^s=(C^s\cup R(C^s), E^s)$, $\forall s=1, \ldots, r$을 s개의 마디를 순차적으로 축약시킨 후에 얻어지는 그래프라 하였음을 상기하자. 단, $C^0=C$이다. 모든 $s=0, 1, \ldots, r$에 대해서 임의의 $i\in C^s$는 C의 부분집합 $A(i)$와 $R(C)$의 부분집합 $B(i)$를 축약하여 생성된 마디로 볼 수 있다. 즉, $i\in C$라면, $A(i)=\{i\}$이고 $B(i)=\emptyset$인 것으로 간주한다.

그러면, 다음에서 모든 $s=0, 1, \ldots, r$와 $i\in C^s$에 대해 $\sum_{m\in A(i)}\alpha_m+\sum_{n\in B(i)}\beta_n=\mu$라는 등식이 성립함을 보이겠다. 단, μ는 상수이다. 이것이 성립한다면, 모든 $s=1, \ldots, r$에 대해 $\beta_s=-(|\delta^{s-1}(s)|-1)\mu$라는 것을 의미한다. 단, 모든 $s=1, \ldots, r$에 대해 $\delta^{s-1}(s)=\{i\in C^{s-1}\mid (s, i)\in E^{s-1}\}$이다. 이는 다시, 부등식 (9)에 나타난 변수들의 계수가 부등식 (7)에 나타난 변수들의 계수에 어떤 상수 μ를 곱하여 얻어진다는 것을 의미함과 동시에 Nemhauser and Wolsey[9]의 Theorem 3.6에 의해 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의한다는 것을 뜻한다. 그러면, 위의 사실을 lifting 순서에 대한 수학적 귀납법으로 증명하도록 하겠다.

1) $s=0$ 일 때 : 각각의 $j\in R(C)$와 그에 대한 모든 $i\in\delta(j)$에 대해, 그래프 $F_{ik(i)}$를 $j\in R(C_{ik(i)})$를 만족하는 $G(C)\backslash\{i\}$의 연결성요소라 하자. 단, $k(i)\in\Gamma_i$이다. 모든 $j\in R(C)$와 $i\in\delta(j)$에 대해, 다음의 해들은 [보조정리 1]의 (a)에 의해 $P(C)$에 속하고 부등식 (7)을 등식으로 만족한다.

$$y_n=1,\ \forall n\in R(C_{ik(i)}),\ y_n=0,\ o/w,$$
$$x_m=1,\ \forall m\in C_{ik(i)},\ x_m=0,\ o/w.$$

따라서, 모든 $j\in R(C)$에 대해 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{m\in C_{ik(i)}}\alpha_m+\sum_{n\in R(C_{ik(i)})}\beta_n=0,\ \forall i\in\delta(j) \qquad (10)$$

식 (10)의 양변에서 부등식 (9)의 계수들의 합인 $\sum_{m\in C}\alpha_m+\sum_{n\in R(C)}\beta_n$을 빼면, 모든 $j\in R(C)$에 대해서 다음의 식이 얻어진다.

$$\sum_{m\in C\backslash C_{ik(i)}}\alpha_m+\sum_{n\in R(C)\backslash R(C_{ik(i)})}\beta_n=\sum_{m\in C}\alpha_m+\sum_{n\in R(C)}\beta_n,\ \forall i\in\delta(j) \qquad (11)$$

식 (11)에서 $C\backslash C_{ik(i)}=\{i\}\cup\{\cup_{k\in\Gamma_i\backslash\{k(i)\}}C_{ik}\}$, $R(C)\backslash R(C_{ik(i)})=\cup_{k\in\Gamma_i\backslash\{k(i)\}}R(C_{ik})$이다. 식 (11)로 부터, 모든 $u, v\in\delta(j)$에 대해서, 다음의 식이 성립한다.

$$\alpha_u+\sum_{k\in\Gamma_u\backslash\{k(u)\}}\Big(\sum_{m\in R(C_{uk})}\alpha_m+\sum_{n\in R(C_{uk})}\beta_n\Big)=$$
$$\alpha_v+\sum_{k\in\Gamma_v\backslash\{k(v)\}}\Big(\sum_{m\in C_{vk}}\alpha_m+\sum_{n\in R(C_{vk})}\beta_n\Big) \qquad (12)$$

[보조정리 1]의 (a)에 의해서, 식 (12)의 양변의 두 번째 항들의 값이 0이라는 사실을 알 수 있다. 따라서, 모든 $j \in R(C)$와 모든 $i \in \delta(j)$에 대해서, $\alpha_i = \mu_j$임을 알 수 있다. 단, 모든 $j \in R(C)$에 대해서, μ_j는 상수이다. 또한, $G(C)$가 연결성이므로, 모든 $j \in R(C)$에 대해서 $\mu_j = \mu$임을 알 수 있고, 이것은 모든 $i \in C$에 대해서, $\alpha_i = \mu$임을 의미한다. 단, μ는 상수이다.

2) $s = l-1$일 때 : 귀납가설이 성립한다고 가정하자. 즉, 모든 $i \in C^{l-1}$에 대해서 $\sum_{m \in A(i)} \alpha_m + \sum_{n \in B(i)} \beta_n = \mu$이다.

3) $s = l$일 때 :

$|C^l| = 1$일 경우 : 이 경우에는 $\delta^{l-1}(l) = C^{l-1}$이다. 따라서, [보조정리 1]의 b)에 의해서,

$$\sum_{I \in C^{l-1} \setminus \{i\}} \alpha_I + \beta_I = 0, \quad \forall i \in C^{l-1},$$

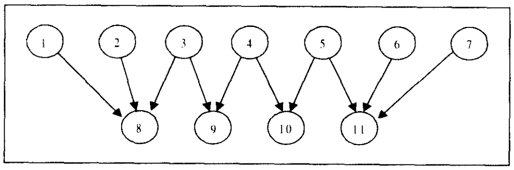
단, $\alpha_I = \sum_{m \in A(I)} \alpha_m + \sum_{n \in B(I)} \beta_n = \mu$, $\forall I \in C^{l-1}$이다. 따라서, $i \in C^l$에 대해, $\sum_{m \in A(i)} \alpha_m + \sum_{n \in B(i)} \beta_n = \mu$이다.

$|C^l| \geq 2$일 경우 : 이 경우에는 $C^{l-1} \cap C^l \neq \emptyset$이다. 앞의 식 (12)를 도출하기위해 정의된 기호들을 G^l 상에서 재정의하고, 동일한 추론을 통해 식 (12)와 본질적으로 동일한 식을 도출할 수 있다. 따라서, 모든 $i \in C^l$에 대해서 $\sum_{m \in A(i)} \alpha_m + \sum_{n \in B(i)} \beta_n = \mu$라는 관계를 유도할 수 있다.

따라서 1), 2), 그리고 3)에 의하여 귀납가설이 성립한다. □

그러면, 예를 통해서 [정리 4]의 의미와 기존의 관련된 연구결과와의 차이점과 관계에 대해 간략히 설명하도록 하겠다.

[그림 4]와 같이 (BPK)의 한 예가 주어졌다고 하자. 단, $a_i = 1$, $i = 1, \ldots, 7$이고 $b = 5$이다. 여기서 $C = \{8, 9, 10, 11\}$로 정하면 C는 하나의



[그림 4] (BPK)의 한 예

IC이고, $R_2(C) = \{3, 4, 5\}$이므로 다음과 같은 lifting된 IC 부등식을 얻을 수 있다.

$$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} - y_3 - y_4 - y_5 \leq 0 \tag{13}$$

또한, C는 최소연결성이고 C에 대한 수정절단마디인 마디 8과 마디 11에 대해서 $C \setminus \{8\}$과 $C \setminus \{11\}$이 모두 독립이다. 따라서 C가 [정리 4]의 조건들을 모두 만족하므로 부등식 (13)이 $P(C)$의 facet을 정의함을 알 수 있다.

Park and Park[11]은 $G(C)$가 연결성인 경우, C가 MIC이면, lifting된 IC 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의함을 보였다. 물론, C가 MIC이면, [정리 4]의 조건 (a)와 (b)를 모두 만족하지만, 그 반대는 항상 성립하는 것은 아니다. 위의 예에서 보면, $C = \{8, 9, 10, 11\}$은 $C \setminus \{9\}$가 종속이므로 MIC는 아니지만 [정리 4]의 조건들을 만족한다. 2절에서 언급한 바와 같이, Crama and Mazzola[3]도 $G(C)$가 연결성인 경우, lifting된 IC 부등식이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시하였는데, 그 조건을 위의 예에 맞추어 제시하면 다음과 같다.

$$\sum_{j \in R(C)} a_j = b + 1$$

Crama and Mazzola[3]의 Theorem 3에 의하면, C가 위의 조건을 만족하면, 부등식 (13)이 $P(C)$의 facet을 정의한다. 그러나, 부등식 (13)이 $P(C)$의 facet을 정의하지만, 위의 조건이 만족되지 않음을 알 수 있다. 그리고, $|R_i| = 2$, $\forall i \in M$이고 C가 최소연결성 IC인 경우에 [정리 4]의 조건 (b)는 lifting된 IC 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의할 필요충분조건이 되는데, 이는 Johnson *et. al.*[7]의 Theorem 1에 의해 알 수 있다.

4. 결론 및 추후 연구 과제

본 연구에서는 임의의 IC $C \subseteq M$에 의해 정의되는 우선순위그래프 $G(C)$가 연결성인 경우, lifting된 IC 부등식 (7)이 $P(C)$의 facet을 정의할 충분조건을 제시하였는데, 이는 기존의 관련연구에서 제시된 충분조건들보다 완화된 것이다. 이를 (BPK)를 해결하기 위한 해법에 이용하기 위해서는 제시된 조건을 만족하는 부등식 (7)을 효율적으로 찾아낼 수 있는 separation 알고리듬이 필요하다. 부등식 (7)을 separation하는 문제는 NP-hard라고 알려져 있다[7]. 따라서, 효과적인 발견적 해법을 개발하여 (BPK)를 위한 분지-절단 알고리듬(Branch-and-cut algorithm)에 이용하는 것이 타당하다고 생각된다. 이론적인 측면에서, 본 연구결과를 임의의 IC $C \subseteq M$에 의해 정의되는 우선순위그래프 $G(C)$가 비연결성인 경우와 우선순위제약이 이분할성에 국한되지 않은 일반적인 경우로 확장하는 연구가 필요할 것으로 생각된다.

서론에서 밝혔듯이 (BPK)로 모형화될 수 있는 응용문제들이 많으며, 본 연구결과는 이들 문제에 대한 최적해를 효율적으로 구할 수 있는 분지-절단 알고리듬의 개발에 유용한 자료가 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] Balinski, N.L., "On a selection problem," *Management Science*, Vol.17(1970), pp.230-231.

[2] Boyd, E.A., "Polyhedral results for the precedence-constrained knapsack problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.41(1993), pp.185-201.

[3] Crama, Y. and J.B. Mazzola, "Valid inequalities and facets for a hypergraph model of the nonlinear knapsack and the FMS part selection problems," *Annals of Operations Research*, Vol.58(1995), pp.99-128.

[4] Dijkhuizen, G. and U. Faigle, "A cutting-plane approach to the edge-weighted maximal clique problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.69(1993), pp.121-130.

[5] Eisner, N.J. and D.G. Severance, "Mathematical techniques for efficient record segmentation in large shared databases," *Journal of ACM*, Vol.23(1976), pp.619-635.

[6] Hwan, S.H. and A.W. Shogan, "Modelling and solving an FMS part type selection problem," *International Journal of Production Research*, Vol27(1989), pp.1249-1366.

[7] Johnson, E.L., A. Mehrotra, and G.L. Nemhauser, "Min-cut clustering," *Mathematical Programming*, Vol.62(1993), pp.133-151.

[8] Mamer, J.W. and A.W. Shogan, "A constrained capital budgeting problem with applications to repair kit selection problem," *Management Science*, Vol.33(1987), pp.800-806.

[9] Nemhauser, G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988.

[10] Park, K, K. Lee, and S. Park, "An extended formulation approach to the edge-weighted maximal clique problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.95(1996), pp. 671 682.

[11] Park, K. and S. Park, "Lifting cover inequalities for the precedence-constrained knapsack problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.72(1997), pp.219-241.

[12] Stecke, K.E., "Formulation and solution of nonlinear integer production planning problems for FMS," *Management Science*, Vol.29(1983), pp.273-288.